

Hippasos

450 Jdt. vor Christus, Metapont in Süditalien

Die Hitzewelle hatte Italien fest im Griff. Daher beschloss ich meinen täglichen Strandspaziergang auf den frühen Morgen zu verlegen. Als ich am Strand ankam, konnte ich von weitem einen Menschen entdecken, der regungslos an der Wasserlinie auf dem Bauch lag. Als ich näher kam, konnte ich einen jungen Mann sehen, der an einem Handgelenk ein kurzes Seil festgebunden hatte. Plötzlich hörte ich ein leises Stöhnen. Der Mann war noch am Leben. Schnell packte ihn und zog ihn weiter den Strand hinauf. In der Tat, der Mann aus dem Meer lebte. Schnell rannte ich zum Dorf und holte Hilfe. Mit einem Karren brachten wir den armen Kerl, der mittlerweile zwar stärker atmete, aber völlig erschöpft war, zu mir nach Hause.

Am Abend, die Sonne begann gerade hinter den Bergen zu verschwinden, hörte ich endlich, wie der Gast sein Bett verließ. Der fremde Gast war noch sichtlich mitgenommen von seinem Erlebnis. „Ihr seid wohl mein Retter. Vielen Dank! Mein Name ist Hippasos“, stellte sich der Gast vor. „Was ist passiert? Habt ihr Schiffbruch erlitten?“ Der Mann schaute auf sein Handgelenk, an das immer noch das Seil gebunden war und meinte: „Schiffbruch kann man nicht ganz sagen. Meine Freunde haben mich gefesselt und von Bord geworfen, damit ich sterbe und diesem verbrecherischen Verein nicht mehr in die Quere kommen kann.“

„Welchen Verein meinst du?“ Hippasos überlegte kurz: „Am besten beginne ich von vorne!“. Ich merkte, dass das länger dauern wird und holte einen Becher, den ich vollschenkte. Hippasos begann: „Mit ‚Verein‘ meine ich die Pythagoreer. Diese Vereinigung wurde von dem mittlerweile verstorbenen Pythagoras gegründet. Ziel war es ein besseres Leben zu führen. Dies erreicht man, wenn man asketisch lebt und dabei nach Erkenntnis strebt. Philosophie, Astronomie, Harmonielehre und natürlich Mathematik. So wurde viel Mathematik betrieben, zumindest von einem Teil der Vereinigung. Andere Mitglieder lösten sich mit der Zeit von der forschenden Fraktion und kümmerten sich mehr um die religiösen Aspekte der Forschung. Sie betrieben eher Politik. Mit der Zeit wurden sie immer mächtiger. Sie suchten sich Verbündete in allen politischen Bereichen und kümmerten sich anstatt um die Wissenschaft vielmehr um die eigenen Belange. Davon bekam ich allerdings in den ersten Jahren nichts mit. Ich lernte viel und machte meine eigenen Entdeckungen. So ist es mir gelungen in einen Dodekaeder, das ist ein Körper aus zwölf regelmäßigen Fünfecken bestehend, eine Kugel hinein zu konstruieren. Auch habe ich einige Entdeckungen in der Harmonielehre gemacht.“

Eines Tages jedoch fiel mir auf, dass ein wichtiger Grundsatz der Pythagoreer falsch ist. Pythagoras behauptete nämlich, dass alles im Universum Zahl ist. Also die Grundsprache, nach der alles im Universum geordnet ist und sich bewegt, ist die Mathematik oder lässt sich zumindest durch Mathematik beschreiben. Dabei ist alles, was existiert, sehr geordnet und harmonisch. Alles ist Zahl oder zumindest als Verhältnis zweier Zahlen ausdrückbar, wie sie in Brüchen vorkommen. Aber mir ist aufgefallen, dass diese Lehre falsch ist. Eben nicht alles lässt sich in Brüchen darstellen. Klar, jede Zahl lässt sich als Bruch darstellen. $4 = 8/2$. Sogar periodische Zahlen lassen sich als Bruch darstellen, zum Beispiel $0,\overline{66} = 2/3$. Dies funktioniert für unendlich viele Zahlen. Aber es gibt noch Zahlen, die man nicht als Bruch darstellen kann. Damit dies nämlich möglich ist, brauchen beide Zahlen ein gemeinsames Maß. Betrachten wir zunächst zwei Zahlen 15 und 6. Klar, das gemeinsame Maß ist 1, aber in dem Fall gibt es noch die 3, die beide gemeinsam haben. Dieses gemeinsame Maß kann man durch folgendes Verfahren finden:

$15 - 6 = 9$ Man zieht die kleinere von der größeren Zahl ab.

$9 - 6 = 3$ Dies macht man soweit, bis das Ergebnis kleiner als die Zahl ist.

$6 - 3 = 3$ Dann zieht man das Ergebnis von der kleineren Zahl ab.

$3 - 3 = 0$ Erhält man bei der Subtraktion die Null, so hat man das gemeinsame Maß, hier die 3, gefunden. In diesem Fall sagt man, dass die Zahlen kommensurabel sind.

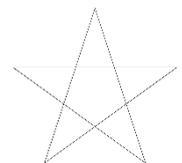
Versuche es selbst mit zwei Zahlen. Das Verfahren nennt man Wechselwegnahme.

Dies geht auch bei Strecken.

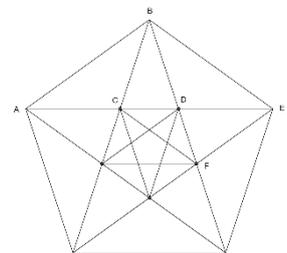


Mit einem Zirkel kann man die kleinere Strecke messen und von der größeren abtragen. Dies funktioniert so lange, bis man das gemeinsame Maß gefunden hat.“

„Ja aber ist das nicht zu ungenau, um festzustellen, dass es kein gemeinsames Maß gibt?“ „Richtig. Dass zwei Zahlen bzw. Strecken kein gemeinsames Maß besitzen, muss man durch Überlegen zeigen. Nehmen wir einmal das Erkennungszeichen der Pythagoreer, das Pentagramm. Ironischerweise findet man schon hier zwei inkommensurable Strecken.



Ergänzen wir das Pentagramm zu einem Fünfeck und zeichnen zur Veranschaulichung noch ein kleines Pentagramm hinein. Nun werde ich dir zeigen, dass die Seite AB und die Diagonale AE kein gemeinsames Maß besitzen. Nett wäre es, wenn du mir glauben würdest, dass die Strecke AB gleich lang ist wie die Strecke AD ist.“



„Ich glaube es dir gerne. Zur Not können wir dies ja noch nachholen.“

Hippasos fuhr fort:

„Wie wir gesehen haben, ziehen wir von der langen Strecke AE die kurze Strecke AB bzw. AD ab. Übrig bleibt die Strecke DE. Diese ziehe ich nun von der Strecke AD ab. Da mein Pentagramm symmetrisch ist, ist DE gleich lang wie AC.

Damit bleibt als Rest die Strecke CD übrig. Nun müssen wir CD von AC abziehen. Nun musst du mir wieder glauben, dass AC gleichlang wie CF ist. CF ist die Diagonale des kleineren Fünfecks die Strecke CD ist die Seite des kleineren Fünfecks. Damit sind wir wieder am Ausgangsproblem und wir merken, dass wir das Spiel unendlich lange mit immer kleineren Fünfecken weiterspielen können, aber es wird kein gemeinsames Maß geben.

„Ok. Damit hast du gezeigt, dass es Strecken gibt, die kein gemeinsames Maß haben. Und damit ist bewiesen, dass eben nicht alles im Universum sich als Verhältnis zweier Zahlen darstellen lässt. Aber deswegen bringt man doch niemanden um?“, fragte ich erstaunt. „Stimmt deswegen alleine nicht. Ich nehme sogar an, dass Pythagoras das auch schon bemerkt hat, aber den Irrtum nicht zugeben wollte, weil die Theorie „Alles ist Zahl“ das Göttliche und die Mathematik so schön in Einklang bringt. Aber die Sekte der Pythagoreer ist mittlerweile auf 600 Mitglieder angewachsen. Viele wichtige

Posten in Griechenland sind durch Pythagoreer besetzt. Wie schlecht würden diese dastehen, wenn man so leicht zeigen könnte, dass schon die Grundannahme ihrer Gemeinschaft ein Irrtum ist.“

„Ok und wer hat versucht dich umzubringen?“ „Das kann ich leider nicht genau sagen. Ich lag im Bett und wurde von einigen Männern unsanft geweckt, als sie mir einen Sack über den Kopf zogen und die Hände hinter den Rücken banden. Ich konnte sie nicht erkennen, aber ich vermute, dass es meine mathematischen Sektenbrüder, deren Lebenswerk ich zerstört habe, waren.“ „Ich verstehe nicht ganz.“ „Naja, auch meine Mathematikerfreunde haben ja mathematisch geforscht und Dinge bewiesen.“ Aber alle Beweise, die auf die Annahme beruhen, dass es immer ein gemeinsames Maß gibt, sind somit hinfällig und das Werk von vielen meiner Mitbrüder ist somit umsonst. Ich vermute, dass dies vertuscht werden sollte. Aber ich hatte Glück oder einer meiner Mitbrüder hatte Erbarmen und ein Knoten am Handgelenk ließ sich leicht lösen. So konnte ich den Sack vom Kopf nehmen und wieder an den Strand schwimmen, wo du mich gefunden hast.“ „Was hast du jetzt vor?“, fragte ich. „Keine Ahnung, aber da wohl alle glauben, dass ich tot bin, werde ich die Gelegenheit nutzen und irgendwo hin fliehen.“ So geschah es. Mein Gast blieb noch zwei Tage und zog dann seines Weges. Ich habe seitdem nichts mehr von ihm gehört.

Nachtrag: Hipposos lebte im 5. / 6. Jhdt. und die Legende berichtet, dass seine Freunde einen Schiffbruch inszeniert haben, den er aber laut Legende nicht überlebt hat. Mit der Entdeckung der inkommensurablen Größen kam es zur ersten Grundlagenkrise der Mathematik, was dazu führte, dass die griechische Mathematik sich viele Jahrhunderte der Geometrie und nicht mehr den Zahlen zuwendete. Es dauerte fast bis ins 15. Jahrhundert bis die Mathematiker wieder Algebra betrieben.

Aufgabe: In dem Beweis wurden zwei Annahmen verwendet, die hier nicht bewiesen wurden. Kannst du zeigen dass gilt $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $\overline{AC} = \overline{CF}$?